数理解析研究所講究録
661巻 1988年 178-195

汎関数積分の近似理論

関西学院大学理学部　中尾　肇　(Hajime Nakao)
関西学院大学理学部　今村　勤　(Tsutomu Imamura)

汎関数積分法は非常に強力な手法の一つであり，近年その研究が盛んになってきている．しかし，具体的な解や値が必要な場合「実行できる汎関数積分はほとんどない」ことが，非常に大きな難点となる．それ故，どうしても「汎関数積分の近似評価」が必要となる．その方法として「適当に演算子を導入し，汎関数積分を汎関数微分の形に変形し，漸化式を用いてこれを解く」ことが考えられる．ここではこの方法の有効性を調べるために厳密解の判っている一次元調和振動子を，その応用例として乱流場の中の２粒子の相対拡散をそれぞれ取り上げている．少なくとも，一次元調和振動子の場合はこの方法の有効性が実証されたので，他にもこの方法が有効である対象が存在すると考えられる．

§１．はじめに

汎関数積分法を用いると多くの分野で解析的な仕事が簡単化されたり，理論の見通しが立ち易くなったり，理論を美しく展開できたりし，その結果研究が促進される．その意味で汎関数積分法は非常に強力な手法の一つであり，近年その研究が盛んになってきている.[1]

その応用例として，まず流体力学の乱流場の統計理論における汎関数を用いた研究があげられる．他の手法では，もともと無限個ある方程式系を扱うためには，それらを有限個で打ち切るいわゆる切断の問題が付きまとうが，特性汎関数を用いる手法ではこれを気にすることなく美しく理論を展開できる.[2]具体的には，拡散問題に対する応用やＨｏｐｆの特性汎関数などがある．次に量子論に於ける汎関数積分法－一般的には径路積分法と呼ばれている－があげられる．この方法による量子論の表現は，一般に正準量子化よりずっと便利になる場合が多いこと，非線形力学系や場の理論に於て非摂動的手法が必要になる場合に，第一原理から

のアプローチが大変易しくなること，理論の形式的な取扱によって，与えられた系の物理的な内容を理解する手助けとして大変役立つことなどがあげられる[3] また，これは素粒子論に於いてもその利用が盛んで，具体的には，Ｆｅｒｍｉ型相互作用を湯川型化する場合に，その見通しが立ち易くなったり，ファイマングラフの一般的な性質を調べるのに役立ったり，ｏｎｅ－ｌｏｏｐ近似に於いて，補正項を扱う際に便利になったりすることなどがあげられる．

このように汎関数積分法は多くの利点を持っている．しかし，現実問題として具体的な解や値がどうしても必要になってくる．ここで汎関数積分法の最大の難点である「実行できる汎関数積分はほとんどない」ことが，大きな「壁」となって立ちふさがる．それ故，どうしても「汎関数積分の近似評価」が必要となる．

この小論では，その方法として「適当に演算子を導入し，汎関数積分を汎関数微分の形に変形し，漸化式を用いてこれを解く」ことを試みた．ここではその方法の有効性を調べるために厳密解の判っている一次元調和振動子を§２で，その応用例として乱流場の中の２粒子の相対拡散を§３で，それぞれ取り上げている．また，ここで用いた方法として，汎関数積分すなわち無限重積分を多重積分にする近似を行っているが，ここで用いた手法ではなく，直接この多重積分を実行し，汎関数積分の近似評価とすることも原理的には可能であるが，現実問題として，例えば４０重積分をモンテカルロ法で実行することは不可能である．この意味に於いてもここで述べた手法には意義があるのではないかと思う．

さて，漸化式を導出するまでの道のりは各問題に於いて違いがあるが，基本的には，

(1)適当にパラメターとその微分を導入し，汎関数積分を実行できる形の汎関数積分に汎関数微分が演算する形にし，その汎関数積分を実行する．

(2)その結果残った汎関数微分の表現の中で，漸化式の核となるべき $A(n)$ を適当に選び，それを変形して

$$A(n)=\triangle nA(n-1)$$

の形にする．但し，$\triangle n$ にはパラメターとその微分を含む．

(3) $A(n)$ を導入したパラメターの試行関数の形に書き，それを上式に代入し，その展開係数間の漸化式を求める．

となる．

最後に，ここで述べた手法が可能になった要因として，コンピューターの発達と数式処理プログラムの進化があげられることを付記する．

§２．一次元調和振動子

一次元調和振動子の Ｆｅｙｎｍａｎ核 $K(r,t,r_0,0)$ は径路積分表示で

$$K(r,t,r_0,0)=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{k=1}^{N-1}dq_k\prod_{k=0}^{N-1}\frac{dp_k}{2\pi}\,e^{\,i\sum_{k=0}^{N-1}p_k(q_{k+1}-q_k)-i\varepsilon\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2}(p_k^2+\omega^2q_k^2)}\tag{2.1}$$

と与えられる[*] 但し，ｒ，r_0 は各々時刻 ｔ，０ での位置，q_k，p_k は各々区間ｋでの位置と運動量，ω は振動数，Ｎは区間の数，$\varepsilon=t/N$ である．また簡単の為，粒子の質量を１としている．

これは Ｎ→∞ の極限で汎関数積分であるが，漸化式を用いこれを具体的に求めるために，パラメター $S_k(k=0,\cdots,N-1)$ を導入し，関係

$$f\left(\frac{\partial}{\partial S_k}\right)e^{aS_k}=f(a)\,e^{aS_k}\qquad\text{（ｆ：任意の関数）}$$

を用いると

$$K(r,t,r_0,0)=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{k=1}^{N-1}dq_k\prod_{k=0}^{N-1}\frac{dp_k}{2\pi}\,e^{\,i\sum_{k=0}^{N-1}p_k(q_{k+1}-q_k)-\frac{i\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial S_k}\right)^2-\frac{i\varepsilon\,\omega^2}{2}\sum_{k=0}^{N-1}q_k^2}$$

$$\times\left.e^{\,i\sum_{k=0}^{N-1}p_kS_k}\right|_{S_k=0}\tag{2.2}$$

となる．ここで十分大きいＮで近似し p_k，q_kについて積分すると

〈脚注〉

(*)一般的には，ハミルトニアンの中の q_kを $\dfrac{(q_{k+1}+q_k)}{2}$ とおく，即ち

$$K(r,t,r_0,0)=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{k=1}^{N-1}dq_k\prod_{k=0}^{N-1}\frac{dp_k}{2\pi}\,e^{\,i\sum_{k=0}^{N-1}p_k(q_{k+1}-q_k)-i\varepsilon\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left(p_k^2+\frac{\omega^2}{4}(q_{k+1}+q_k)^2\right)}$$

であるが，両者は解析的に厳密解が求められ一致するので，ここでは(2.1)式を用いる．また，厳密解は，

$$K(r,t,r_0,0)=\left[\frac{\omega}{2\pi i\sin\omega t}\right]^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\omega}{2\sin\omega t}(\cos\omega t\,(r^2+r_0^2)-2r_0r)}$$

である[3]

$$K(r,t,r_0,0)=\int\frac{dh}{2\pi}e^{ih(r-r_0)-\frac{it}{2}\omega^2r_0^2}e^{\frac{i\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\partial_k^2}e^{ih\sum_{u=0}^{N-1}S_u}e^{i\varepsilon\omega^2r_0\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{u=0}^{k-1}S_u}$$
$$\times e^{-\frac{i\varepsilon\omega^2}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{u=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1}S_uS_v}\Big|_{S_k=0}\qquad(2.3)$$

となる．次に演算子A，Bの関係

$$e^{At}e^{Bt}=e^{Bt}e^{at^3}e^{bt^2}e^{ct^3}e^{dt^4}e^{ft^5}e^{At}\qquad(2.4)$$

$$\left(\begin{array}{l}
\text{但し，}a=-[B,[A,B]]/2,\ b=[A,B],\ c=[A,[A,B]]/2\\
d=[A,[A,[A,B]]]/6-[A,[B,[A,B]]]/4+[A,[B,[A,B]]]/6\\
f=[A,[A,[A,[A,B]]]]/24-[A,[A,[B,[A,B]]]]/4+[B,[A,[A,[A,B]]]]/6\\
\quad-[A,[B,[B,[A,B]]]]/6+[B,[B,[A,[A,B]]]]/4-[B,[B,[B,[A,B]]]]/24\\
t:\text{scalar}
\end{array}\right)$$

を用いるなどしてS_kが∂_kの左になるように変形すると

$$K(r,t,r_0,0)=\int\frac{dh}{2\pi}e^{ih(r-r_0)-\frac{it}{2}\omega^2r_0^2-\frac{i\varepsilon h^2}{2}(N-1)+\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4}(N-2)(N+1)}A(N-2)\Big|_{S_k=0}$$
$$(2.5)$$

$$A(n)\overset{d}{\equiv}e^{\frac{i\varepsilon h^2}{2}n-\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4}n(n+3)}e^{\frac{i\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\partial_k^2}e^{ih\sum_{u=0}^{n}S_u}$$
$$\times e^{i\varepsilon\omega^2r_0\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{u=0}^{k-1}S_u}e^{-\frac{i\varepsilon\omega^2}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{u=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1}S_uS_v}\qquad(2.6)$$

が得られる．ここで，A(n)を変形するが，途中でεについて２次の項が出てきた場合，これを省く．但し，εΣのようにεとO(n)の項の和がかかっている場合，これをO(1)とみなし残すことにする．こうすると，演算子の交換関係を使った場合に出てくる$O(t^6)$の項は省けることが判る（(2.4)式参照）．

A(n)を添字nを含んだ部分とそうでない部分に分け，次に(2.4)式を用いるなどしてS_kが∂_kの左になるように変形すると

$$A(n)=e^{ihS_n}\,e^{i\varepsilon\omega^2 r_0\sum_{u=0}^{n}S_u}\,e^{-\frac{i\varepsilon\omega^2}{2}\sum_{u=0}^{n}\sum_{v=0}^{n}S_uS_v}\,e^{\varepsilon^2\omega^2\sum_{u=0}^{n}\sum_{v=0}^{n}S_u\partial_v}$$

$$\times\, e^{\frac{i\varepsilon^3\omega^2}{2}\sum_{u=0}^{n}\sum_{v=0}^{n}\partial_u\partial_v}\,e^{-\varepsilon^2\omega^2 r_0\sum_{u=0}^{n}\partial_u}A(n-1) \tag{2.7}$$

となる．ここで$A(n)$を

$$A(n)=e^{\Psi(n)}\,e^{\sum_{u=0}^{n}\alpha_u(n)S_u}\,e^{\sum_{u=0}^{n}\sum_{v=0}^{n}\beta_{uv}(n)S_uS_v} \tag{2.8}$$

とおき，(2.7)式に代入し∂_kがS_kの右にくるように変形すると，次の漸化式が得られる．

$$\Psi(n+1)=\Psi(n)+f\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(n)+d\Big[\sum_{k=0}^{n}\{\alpha_k(n)+f\sum_{m=0}^{n}(\beta_{km}(n)+\beta_{mk}(n))\}\Big]^2 \tag{2.9}$$

$$\alpha_x(n+1)=ih\,\delta_{x,n+1}+a$$

$$+\,\Big[\alpha_x(n)+f\sum_{k=0}^{n}(\beta_{xk}(n)+\beta_{kx}(n))$$

$$+2d\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{n}\{\alpha_t(n)+f\sum_{k=0}^{n}(\beta_{tk}(n)+\beta_{kt}(n))\}(\beta_{xs}(n)+\beta_{sx}(n))$$

$$+c\sum_{m=0}^{n}[\alpha_m(n)+f\sum_{k=0}^{n}(\beta_{mk}(n)+\beta_{km}(n))$$

$$+2d\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{n}\{\alpha_t(n)+f\sum_{k=0}^{n}(\beta_{tk}(n)+\beta_{kt}(n))\}(\beta_{ms}(n)+\beta_{sm}(n))]\Big](1-\delta_{x,n+1}) \tag{2.10}$$

$$\beta_{xy}(n+1)=b+[\beta_{xy}(n)+d\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}(\beta_{xk}(n)+\beta_{kx}(n))(\beta_{ym}(n)+\beta_{my}(n))$$

$$+c\sum_{k=0}^{n}\{\beta_{xk}(n)+\beta_{ky}(n)+d\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{n}(\beta_{ks}(n)+\beta_{sk}(n))(\beta_{xt}(n)+\beta_{tx}(n)+\beta_{yt}(n)+\beta_{ty}(n))\}$$

$$+\frac{c^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}(\beta_{xk}(n)+\beta_{ky}(n)+2\beta_{km}(n)$$

$$+d\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{n}(\beta_{xt}(n)+\beta_{tx}(n)+\beta_{yt}(n)+\beta_{ty}(n)+2\beta_{mt}(n)+2\beta_{tm}(n))$$

$$\times(\beta_{ks}(n)+\beta_{sk}(n)))](1-\delta_{x,n+1})(1-\delta_{y,n+1}) \tag{2.11}$$

$$\left(\begin{array}{l} 但し，\quad a=i\varepsilon\omega^2 r_0,\ b=-\dfrac{i\varepsilon\omega^2}{2},\ c=\varepsilon^2\omega^2 \\ \\ \qquad d=\dfrac{i\varepsilon^3\omega^2}{2},\ f=-\varepsilon^2\omega^2 r_0 \\ \\ \qquad \Psi(0)=0,\ \alpha_0(0)=ih+a,\ \beta_{00}(0)=b \end{array}\right).$$

この漸化式を数式処理アプリケーション REDUCE を用いて解けば $K(r,t,r_0,0)$ が求められる．具体的に $t=1$，$r_0=1$，$\omega=1$ の場合に求めると，厳密解，$B(n)$ を S_kの１次式で近似し N＝１０，N＝２０，N＝３０，N＝１００ とした場合，$B(n)$ を S_kの２次式で近似し N＝１０ とした場合の各々の絶対値は

厳密解		·····	０．４３４８
S_k１次	N＝１０	·····	０．４６２１
	N＝２０	·····	０．４４０９
	N＝３０	·····	０．４３３２
	N＝１００	·····	０．４２１９
S_k２次	N＝１０	·····	０．４６０５

となる．但し，いずれの場合も絶対値は距離によらず一定である．図１は上記の中で N＝１０ とした場合の距離と位相の関係のグラフだが，S_kを２次までにした場合の方がS_kを１次までにした場合より近似が良いことが分かる．図２は上記の中でS_kを１次までとし，N＝１０，N＝２０，N＝３０，N＝１００ とした場合の距離と位相の関係を示してある．これを見ると，N を大きくしていくと厳密解に近づいていく様子が分かる．問題は絶対値で，N＝１００ より N＝３０ の方が近似が良いが，はっきりしたことはS_kの２次式で近似した場合をしてみなければ判らない．

この例の場合，前述のεの２次を無視する近似では，S_kの２次までで話が閉じている．この意味で e の肩を S_kの２次式にすれば $A(n)$ の関数形としては近似をしていない．現実の問題では関数形について大幅な制限が必要であることが多い．その意味からS_kの１次式まででとめた関数形を用いてもある程度の近似が得られていることは望ましい状況であるといえる．

§3．乱流場の中の2粒子の相対拡散

乱流場における2粒子の分布密度関数$\phi(r^{(\alpha)},t,r_o^{(\alpha)},0)$は

$$\phi(r^{(\alpha)},t,r_o^{(\alpha)},0)=\left\langle T\cdot e^{-\sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^t u(r^{(\alpha)},t')\cdot\nabla^{(\alpha)}\langle t'\rangle dt'}\prod_{\alpha=1}^{2}\delta(r^{(\alpha)}-r_o^{(\alpha)})\right\rangle_u \quad (3.1)$$

で与えられる．但し，$r^{(\alpha)}$，$r_o^{(\alpha)}$（$\alpha=1.2$）は各々粒子αの時刻t，0に於ける位置，$u(r^{(\alpha)},t')$はEulerの速度場，$\langle\ \rangle_u$は速度場に於ける統計平均を意味する．$\nabla^{(\alpha)}$は$r^{(\alpha)}$に関する微分演算子，Tは time ordered operator で，$\nabla\langle t\rangle$の$\langle t\rangle$は∇がtの関数であることを意味するのではなく，∇の位置を意味する．例えば，$t_1<t_2<t_3$のとき

$$T\cdot[\nabla\langle t_2\rangle u(r,t_1)u(r,t_3)]=u(r,t_3)\nabla u(r,t_1)$$

である[5]．ここで 十分大きなNを用いると$\phi(r^{(\alpha)},t,r_o^{(\alpha)},0)$は

$$\phi(r^{(\alpha)},t,r_o^{(\alpha)},0)=\langle(1-\Delta t\sum_{\alpha=1}^{2}u(r^{(\alpha)},t_N)\cdot\nabla^{(\alpha)})(1-\Delta t\sum_{\alpha=1}^{2}u(r^{(\alpha)},t_{N-1})\cdot\nabla^{(\alpha)})\cdots$$

$$\cdots(1-\Delta t\sum_{\alpha=1}^{2}u(r^{(\alpha)},t_1)\cdot\nabla^{(\alpha)})\prod_{\alpha=1}^{2}\delta(r^{(\alpha)}-r_o^{(\alpha)})\rangle_u \quad (3.2)$$

（但し，$\Delta t\overset{d}{\equiv}\frac{t}{N}$，$t_j=j\Delta t$）

となる．そして，q－表示，p－表示の基底ベクトルが完全系をなすこと，すなわち

$$\int|p_j\rangle\langle p_j|q_j\rangle\langle q_j|\,dp_j dq_j=1$$

を用いると

$$\phi(r^{(\alpha)},t,r_o^{(\alpha)},0)=\left\langle\int\left[\prod_{j=1}^{N}\prod_{\alpha=1}^{2}\frac{dp_j^{(\alpha)}dq_j^{(\alpha)}}{(2\pi)^3}e^{-i\Delta t\,u(q_{j+1}^{(\alpha)},t_j)\cdot p_j^{(\alpha)}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times e^{ip_j^{(\alpha)}\cdot(q_{j+1}^{(\alpha)}-q_j^{(\alpha)})}\right]\prod_{\alpha=1}^{2}\delta(q_1^{(\alpha)}-r_o^{(\alpha)})\right\rangle_u \quad (3.3)$$

（但し，$q_{N+1}^{(\alpha)}\overset{d}{\equiv}r^{(\alpha)}$）

となる．ここでパラメター $B_j^{(\alpha)}$, $Y_j^{(\alpha)}$ ($\alpha=1,2$: $j=1,2,\cdots,N$) を導入し，演算子の関係式

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x}} f(x) = f(x+a)\, e^{a\frac{\partial}{\partial x}} \qquad (f：任意の関数)$$

を用いると

$$\phi(r^{(\alpha)},t,r_0^{(\alpha)},0) = \left\langle \int \left[\prod_{j=1}^{N}\prod_{\alpha=1}^{2} dq_j^{(\alpha)}\, e^{q_{j+1}^{(\alpha)}\cdot\frac{\partial}{\partial Y_j^{(\alpha)}}}\, \delta\left(q_{j+1}^{(\alpha)}-q_j^{(\alpha)}-\frac{\partial}{\partial B_j^{(\alpha)}}\right) \times e^{\Delta t B_j^{(\alpha)}\cdot \mathbf{u}(Y_j^{(\alpha)},t_j)}\right]_{B_j^{(\alpha)}=Y_j^{(\alpha)}=0} \prod_{\alpha=1}^{2}\delta(q_1^{(\alpha)}-r_0^{(\alpha)})\right\rangle_u \quad (3.4)$$

となる．次に，$q_j^{(\alpha)}$ の積分を実行して，上の演算子の関係式を使うと

$$\phi(r^{(\alpha)},t,r_0^{(\alpha)},0) = \left\langle \int \prod_{\alpha=1}^{2} \frac{dh^{(\alpha)}}{(2\pi)^3}\, e^{ih^{(\alpha)}\cdot(r^{(\alpha)}-r_0^{(\alpha)})}\, e^{\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{j}\frac{\partial}{\partial B_k^{(\alpha)}}\cdot\frac{\partial}{\partial Y_j^{(\alpha)}}} \times e^{\Delta t\sum_{j=1}^{N}(B_j^{(\alpha)}-ih^{(\alpha)})\cdot \mathbf{u}(Y_j^{(\alpha)}+r_0^{(\alpha)},t_j)}\Big|_{B_j^{(\alpha)}=Y_j^{(\alpha)}=0}\right\rangle_u \quad (3.5)$$

となる．ここで $\mathbf{u}(r^{(\alpha)},t)$ が結合ガウス分布であると仮定すると

$$\langle e^{A_a u_a}\rangle_u = e^{\frac{1}{2}\langle A_a u_a A_b u_b\rangle_u} \qquad (但し，A_a は u_a を含まない)$$

であるから，これと上の演算子の関係式を使うと

$$\phi(r^{(\alpha)},t,r_0^{(\alpha)},0) = \int \left[\prod_{\alpha=1}^{2}\frac{dh^{(\alpha)}}{(2\pi)^3}\, e^{ih^{(\alpha)}\cdot(r^{(\alpha)}-r_0^{(\alpha)})}\right] e^{\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{j}\frac{\partial}{\partial B_k^{(\alpha)}}\cdot\frac{\partial}{\partial Y_j^{(\alpha)}}}$$

$$\times e^{\frac{1}{2}(\Delta t)^2\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}(B_j^{(\alpha)}-ih^{(\alpha)})_a S_{ab}(r_0^{(\alpha)}-r_0^{(\beta)}+Y_j^{(\alpha)}-Y_k^{(\beta)},t_j-t_k)(B_k^{(\beta)}-ih^{(\beta)})_b}\Big|_{B_j^{(\alpha)}=Y_j^{(\alpha)}=0} \quad (3.6)$$

$$S_{ab}(r,t) \stackrel{d}{\equiv} \langle u_a(r,t)\, u_b(0,0)\rangle_u$$

$$= \int S(h,t)\left(\delta_{ab}-\frac{h_a h_b}{h^2}\right) e^{ih\cdot r}\, dh$$

$$= \left[\frac{r}{2}\frac{df}{dr}(r,t)+f(r,t)\right]\delta_{ab}-\frac{r}{2}\frac{df}{dr}(r,t)\frac{r_a r_b}{r^2} \tag{3.7}$$

$$f(r,t)\overset{d}{\equiv}8\pi\int_0^\infty dh\left[\frac{\sin hr}{hr^3}-\frac{\cos hr}{r^2}\right]S(h,t) \tag{3.8}$$

となる．但し，$S_{ab}(r,t)$の等方性を仮定している．この式を変形すると

$$\phi(r^{(\alpha)},t,r_0^{(\alpha)},0)=\int\left[\prod_{\alpha=1}^{2}\frac{dh^{(\alpha)}}{(2\pi)^3}e^{ih^{(\alpha)}\cdot(r^{(\alpha)}-r_0^{(\alpha)})}\right]$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}(\Delta t)^2\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}h_a^{(\alpha)}S_{ab}(r_0^{(\alpha)}-r_0^{(\beta)},t_j-t_k)h_b^{(\beta)}}\left.A(N)\right|_{B_j^{(\alpha)}=Y_j^{(\alpha)}=0} \tag{3.9}$$

$$A(n)\overset{d}{\equiv}e^{\frac{1}{2}(\Delta t)^2\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}h_a^{(\alpha)}S_{ab}(r_0^{(\alpha)}-r_0^{(\beta)},t_j-t_k)h_b^{(\beta)}}\;e^{\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{\partial}{\partial B_k^{(\alpha)}}\cdot\frac{\partial}{\partial Y_j^{(\alpha)}}}$$

$$\times e^{\frac{1}{2}(\Delta t)^2\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(B_j^{(\alpha)}-ih^{(\alpha)})_a S_{ab}(r_0^{(\alpha)}-r_0^{(\beta)}+Y_j^{(\alpha)}-Y_k^{(\beta)},t_j-t_k)(B_k^{(\beta)}-ih^{(\beta)})_b} \tag{3.10}$$

となる．ここで，(3.10)式に演算子の関係式

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x}}f(x)\,e^{-a\frac{\partial}{\partial x}}=f(x+a)$$ （但し，f：任意の関数）

を使うなどすると

$$\begin{aligned}A(n)=\Bigg[1&+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\sum_{\alpha,j,\beta,k}^{n}\sum^{n}{}'\Big(B_j^{(\alpha)}+\sum_{s=j}^{n}\frac{\partial}{\partial Y_s^{(\alpha)}}-ih^{(\alpha)}\Big)_a\Big(B_k^{(\beta)}+\sum_{s=k}^{n}\frac{\partial}{\partial Y_s^{(\beta)}}-ih^{(\beta)}\Big)_b\\&\times S_{ab}\Big(r_0^{(\alpha)}-r_0^{(\beta)}+Y_j^{(\alpha)}-Y_k^{(\beta)}+\sum_{s=1}^{j}\frac{\partial}{\partial B_s^{(\alpha)}}-\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial}{\partial B_s^{(\beta)}},t_j-t_k\Big)\\&+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\sum_{\alpha,j,\beta,k}^{n}\sum^{n}{}'h_a^{(\alpha)}S_{ab}(r_0^{(\alpha)}-r_0^{(\beta)},t_j-t_k)h_b^{(\beta)}\Bigg]A(n-1)\end{aligned} \tag{3.11}$$

（但し，$\sum_{\alpha,j,\beta,k}^{n}\sum^{n}{}'$は（$j=k=n$の項）$+\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}$（$k=n$の項）$+\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}$（$j=n$の項）を意味する）

が得られる．以下

$$A(n)=\Psi(n)+\sum_{\alpha,s}^{n}\Phi_{s,a}^{(\alpha)}(n)B_{s,a}^{(\alpha)}+\sum_{\alpha,s}^{n}\Gamma_{s,a}^{(\alpha)}(n)Y_{s,a}^{(\alpha)}+\sum_{\alpha,s}^{n}\sum_{\beta,t}\Phi_{2st,ab}^{(\alpha\beta)}(n)B_{s,a}^{(\alpha)}B_{t,b}^{(\beta)}$$

$$+\sum_{\alpha,s}^{n}\sum_{\beta,t}^{n}\Gamma^{(\alpha\beta)}_{2st,ab}(n)Y^{(\alpha)}_{s,a}Y^{(\beta)}_{t,b}+\sum_{\alpha,s}^{n}\sum_{\beta,t}^{n}\chi^{(\alpha\beta)}_{st,ab}(n)B^{(\alpha)}_{s,a}Y^{(\beta)}_{t,b} \qquad (3.12)$$

$$\left(\text{但し，}\ \sum_{\alpha,s}^{n}\overset{d}{\equiv}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{s=1}^{n},\ \sum_{\beta,t}^{n}\overset{d}{\equiv}\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{t=1}^{n}\right)$$

とA(n)を展開し，$\Psi(n)$，$\Phi^{(\alpha)}_{s,a}(n)$，$\Gamma^{(\alpha)}_{s,a}(n)$，$\Phi^{(\alpha\beta)}_{2st,ab}(n)$，$\Gamma^{(\alpha\beta)}_{2st,ab}(n)$，$\chi^{(\alpha\beta)}_{st,ab}(n)$に対する漸化式を求める．まず，(3.12)式のようにA(n)を展開すると

$$S_{ab}\left(r_o^{(\alpha)}-r_o^{(\beta)}+Y_j^{(\alpha)}-Y_k^{(\beta)}+\sum_{s=1}^{j}\frac{\partial}{\partial B_s^{(\alpha)}}-\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial}{\partial B_s^{(\beta)}},\ t_j-t_k\right)$$

$$=S_{ab}+S_{ab,c}(Y_j^{(\alpha)}-Y_k^{(\beta)})_c+\frac{1}{2}S_{ab,cd}(Y_j^{(\alpha)}-Y_k^{(\beta)})_c(Y_j^{(\alpha)}-Y_k^{(\beta)})_d$$

$$+\left[S_{ab,c}+S_{ab,cd}(Y_j^{(\alpha)}-Y_k^{(\beta)})_d+\frac{1}{2}S_{ab,cde}(Y_j^{(\alpha)}-Y_k^{(\beta)})_d(Y_j^{(\alpha)}-Y_k^{(\beta)})_e\right]\left(\sum_{s=1}^{j}\frac{\partial}{\partial B_s^{(\alpha)}}-\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial}{\partial B_s^{(\beta)}}\right)_c$$

$$+\frac{1}{2}\left[S_{ab,cd}+S_{ab,cde}(Y_j^{(\alpha)}-Y_k^{(\beta)})_e+\frac{1}{2}S_{ab,cdef}(Y_j^{(\alpha)}-Y_k^{(\beta)})_e(Y_j^{(\alpha)}-Y_k^{(\beta)})_f\right]$$

$$\times\left(\sum_{s=1}^{j}\frac{\partial}{\partial B_s^{(\alpha)}}-\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial}{\partial B_s^{(\beta)}}\right)_c\left(\sum_{s=1}^{j}\frac{\partial}{\partial B_s^{(\alpha)}}-\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial}{\partial B_s^{(\beta)}}\right)_d \qquad (3.13)$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{但し，}\ S_{ab}\overset{d}{\equiv}S_{ab}(r_o^{(\alpha)}-r_o^{(\beta)},t_j-t_k)\\[4pt] S_{ab,c}\overset{d}{\equiv}\dfrac{\partial}{\partial r_{oc}^{(\alpha)}}S_{ab}\quad,\quad S_{ab,cd}\overset{d}{\equiv}\dfrac{\partial^2}{\partial r_{oc}^{(\alpha)}\partial r_{od}^{(\alpha)}}S_{ab}\\[8pt] S_{ab,cde}\overset{d}{\equiv}\dfrac{\partial^3}{\partial r_{oc}^{(\alpha)}\partial r_{od}^{(\alpha)}\partial r_{oe}^{(\alpha)}}S_{ab}\quad,\quad S_{ab,cdef}\overset{d}{\equiv}\dfrac{\partial^4}{\partial r_{oc}^{(\alpha)}\partial r_{od}^{(\alpha)}\partial r_{oe}^{(\alpha)}\partial r_{of}^{(\alpha)}}S_{ab}\end{array}\right)$$

として良い．また，(3.11)，(3.12)，(3.13)式を用いて漸化式を求めれば良いが，最後で$B_j^{(\alpha)}=Y_j^{(\alpha)}=0$とするから残るのは$\Psi(N)$のみであることと，今具体的に

$$\langle\!\langle[(r^{(2)}-r_o^{(2)})-(r^{(1)}-r_o^{(1)})]^2\rangle\!\rangle=$$

$$-\int\prod_{\alpha=1}^{2}dr^{(\alpha)}\int\prod_{\alpha=1}^{2}\frac{dh^{(\alpha)}}{(2\pi)^3}\left[\left(\frac{\partial}{\partial h^{(2)}}-\frac{\partial}{\partial h^{(1)}}\right)^2 e^{i\sum_{\alpha=1}^{2}h^{(\alpha)}\cdot(r^{(\alpha)}-r_o^{(\alpha)})}\right]$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}(\varDelta t)^2\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}h_a^{(\alpha)}S_{ab}(r_o^{(\alpha)}-r_o^{(\beta)},t_j-t_k)h_b^{(\beta)}}\ A(N)\Big|_{B_j^{(\alpha)}=Y_j^{(\alpha)}=0}$$

$$=2b_o(\varDelta t)^2\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}[S(0,t_j-t_k)-S(r_o^{(2)}-r_o^{(1)},t_j-t_k)]_{aa}+2(b_2^{(12)}+b_2^{(21)}-b_2^{(11)}-b_2^{(22)})_{aa} \qquad (3.14)$$

（但し，《　》は乱流場における統計平均を表す，

$$A(N)=b_0+b_{1a}^{(\alpha)}h_a^{(\alpha)}+b_{2ab}^{(\alpha\beta)}h_a^{(\alpha)}h_b^{(\beta)}+\cdots)$$

を求めることにすると，$h_a^{(\alpha)}$について２次より高次のものは結果に影響を与えない．その意味で$\Phi_{s,a}^{(\alpha)}(n)$，$\Gamma_{s,a}^{(\alpha)}(n)$，$\Gamma_{2st,ab}^{(\alpha\beta)}(n)$は漸化式を用いて$\Psi(n)$を求めていく際に$\Psi(n)$に影響を与えないことが判るので，今の場合省いて良い．

さらに，簡単のために $r_0^{(\alpha)}-r_0^{(\beta)}$ に対して $B_j^{(\alpha)}$，$Y_j^{(\alpha)}$ の平行な成分からの寄与のみを考えることにする．すなわち

$$A(n)=\Psi(n)+\sum_{\alpha,s}^{n}\sum_{\beta,t}^{n}\tilde{\Phi}_{2st}^{(\alpha\beta)}(n)\tilde{B}_s^{(\alpha)}\tilde{B}_t^{(\beta)}+\sum_{\alpha,s}^{n}\sum_{\beta,t}^{n}\tilde{\chi}_{st}^{(\alpha\beta)}(n)\tilde{B}_s^{(\alpha)}\tilde{Y}_t^{(\beta)} \tag{3.15}$$

（但し，$\tilde{}$ は平行成分の意）

とすると，最終的に漸化式は

$$\begin{aligned}\Psi(n+1)=\Psi(n)&-(\Delta t)^2\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\{f''(r_0^{(\alpha)}-r_0^{(\beta)},0)(\tilde{h}^{(\alpha)}\tilde{h}^{(\beta)}+2\hat{h}^{(\alpha)}\cdot\hat{h}^{(\beta)})\\&\quad+\frac{r_0}{2}f'''(r_0^{(\alpha)}-r_0^{(\beta)},0)\hat{h}^{(\alpha)}\cdot\hat{h}^{(\beta)}\}\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}\{\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\alpha\alpha)}(n)-\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\alpha\beta)}(n)\}\\&-(\Delta t)^2\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\{f''(r_0^{(\alpha)}-r_0^{(\beta)},t_{n+1}-t_j)(\tilde{k}^{(\alpha)}\tilde{k}^{(\beta)}+2\hat{h}^{(\alpha)}\cdot\hat{h}^{(\beta)})\\&\quad+\frac{r_0}{2}f'''(r_0^{(\alpha)}-r_0^{(\beta)},t_{n+1}-t_j)\hat{h}^{(\alpha)}\cdot\hat{h}^{(\beta)}\}\\&\qquad\times\{\sum_{x=1}^{j}\sum_{y=1}^{j}\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\alpha\alpha)}(n)+\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\beta\beta)}(n)-\sum_{x=1}^{j}\sum_{y=1}^{n}(\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\alpha\beta)}(n)+\tilde{\Phi}_{2yx}^{(\beta\alpha)}(n)\}\\&-i(\Delta t)^2\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}f'(r_0^{(\alpha)}-r_0^{(\beta)},t_{n+1}-t_j)\tilde{h}^{(\alpha)}\sum_{y=j}^{n}(\sum_{x=1}^{n}\tilde{\chi}_{xy}^{(\alpha\beta)}(n)-\sum_{x=1}^{j}\tilde{\chi}_{xy}^{(\beta\beta)}(n))\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{2st}^{(\gamma\delta)}(n+1)=\tilde{\Phi}_{2st}^{(\gamma\delta)}(n)&(1-\delta_{s,n+1})(1-\delta_{t,n+1})\\&+\frac{1}{2}(\Delta t)^2 f(r_0^{(\gamma)}-r_0^{(\delta)},t_s-t_t)\Psi(n)(\delta_{s,n+1}+\delta_{t,n+1}-\delta_{s,n+1}\delta_{t,n+1})\\&+(\Delta t)^2 f''(r_0^{(\gamma)}-r_0^{(\delta)},0)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\tilde{\Phi}_{2jk}^{(\gamma\gamma)}(n)+\tilde{\Phi}_{2jk}^{(\delta\delta)}(n)-2\tilde{\Phi}_{2jk}^{(\gamma\delta)}(n))\delta_{s,n+1}\delta_{t,n+1}\\&+(\Delta t)^2 f''(r_0^{(\gamma)}-r_0^{(\delta)},t_{n+1}-t_t)\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\Phi}_{2jk}^{(\gamma\gamma)}(n)+\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{t}\tilde{\Phi}_{2jk}^{(\delta\delta)}(n)\\&\qquad-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{t}(\tilde{\Phi}_{2jk}^{(\gamma\delta)}(n)+\tilde{\Phi}_{2kj}^{(\delta\gamma)}(n))\}\delta_{s,n+1}(1-\delta_{t,n+1})\\&+(\Delta t)^2 f''(r_0^{(\gamma)}-r_0^{(\delta)},t_{n+1}-t_s)\{\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\tilde{\Phi}_{2jk}^{(\gamma\gamma)}(n)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\Phi}_{2jk}^{(\delta\delta)}(n)\\&\qquad-\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}(\tilde{\Phi}_{2jk}^{(\gamma\delta)}(n)+\tilde{\Phi}_{2kj}^{(\delta\gamma)}(n))\}(1-\delta_{s,n+1})\delta_{t,n+1}\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\chi}_{st}^{(\gamma\delta)}(n+1) = {} & \tilde{\chi}_{st}^{(\gamma\delta)}(n)(1-\delta_{s,n+1})(1-\delta_{t,n+1}) \\
& +(\Delta t)^2 \sum_{\beta=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} f''(r_o^{(\gamma)}-r_o^{(\beta)}, t_{n+1}-t_j)\sum_{y=j}^{n}\Big(\sum_{x=1}^{n}\tilde{\chi}_{xy}^{(\gamma\beta)}(n)-\sum_{x=1}^{j}\tilde{\chi}_{xy}^{(\beta\beta)}(n)\Big)\delta_{s,n+1}\,\delta_{t,n+1}\,\delta_{\gamma,\delta} \\
& -(\Delta t)^2 f''(r_o^{(\gamma)}-r_o^{(\delta)}, t_{n+1}-t_t)\sum_{y=t}^{n}\Big(\sum_{x=1}^{n}\tilde{\chi}_{xy}^{(\gamma\delta)}(n)-\sum_{x=1}^{t}\tilde{\chi}_{xy}^{(\delta\delta)}(n)\Big)\delta_{s,n+1}(1-\delta_{t,n+1}) \\
& +i(\Delta t)^2\Big\{f'(r_o^{(\gamma)}-r_o^{(\delta)},0)\tilde{h}^{(\delta)}-\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{j=1}^{n+1} f'(r_o^{(\gamma)}-r_o^{(\beta)},t_{n+1}-t_j)\tilde{h}^{(\beta)}\delta_{\gamma,\delta}\Big\} \\
& \qquad\qquad \times\Psi(n)\,\delta_{s,n+1}\,\delta_{t,n+1} \\
& +i(\Delta t)^2 f'(r_o^{(\gamma)}-r_o^{(\delta)},t_{n+1}-t_t)\tilde{h}^{(\delta)}\Psi(n)\,\delta_{s,n+1}(1-\delta_{t,n+1}) \\
& +i(\Delta t)^2 f'(r_o^{(\gamma)}-r_o^{(\delta)},t_{n+1}-t_s)\tilde{h}^{(\delta)}\Psi(n)(1-\delta_{s,n+1})\,\delta_{t,n+1} \\
& -i(\Delta t)^2\sum_{\beta=1}^{2} f'(r_o^{(\gamma)}-r_o^{(\beta)},t_{n+1}-t_s)\tilde{h}^{(\beta)}\Psi(n)(1-\delta_{s,n+1})(1-\delta_{t,n+1})\,\delta_{s,t}\,\delta_{\gamma,\delta} \\
& +6i(\Delta t)^2 F(\gamma,\delta,0)\tilde{h}^{(\delta)}\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}\Big(\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\gamma\gamma)}(n)+\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\delta\delta)}(n)-\tilde{\Phi}_{2yx}^{(\gamma\delta)}(n)-\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\delta\gamma)}(n)\Big) \\
& \qquad\qquad \times\delta_{s,n+1}\,\delta_{t,n+1} \\
& +6i(\Delta t)^2\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{j=1}^{n+1}F(\alpha,\gamma,j,n+1)\tilde{h}^{(\alpha)}\Big\{\sum_{x=1}^{j}\sum_{y=1}^{j}\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\alpha\alpha)}(n)+\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\gamma\gamma)}(n) \\
& \qquad -\sum_{x=1}^{j}\sum_{y=1}^{n}\Big(\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\alpha\gamma)}(n)+\tilde{\Phi}_{2yx}^{(\gamma\alpha)}(n)\Big)\Big\}\delta_{s,n+1}\,\delta_{t,n+1}\,\delta_{\gamma,\delta} \\
& +6i(\Delta t)^2F(\gamma,\delta,s,n+1)\tilde{h}^{(\delta)}\Big\{\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\delta\delta)}(n)+\sum_{x=1}^{s}\sum_{y=1}^{s}\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\gamma\gamma)}(n) \\
& \qquad -\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{s}\Big(\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\delta\gamma)}(n)+\tilde{\Phi}_{2yx}^{(\gamma\delta)}(n)\Big)\Big\}(1-\delta_{s,n+1})\,\delta_{t,n+1} \\
& +6i(\Delta t)^2F(\gamma,\delta,t,n+1)\tilde{h}^{(\delta)}\Big\{\sum_{x=1}^{t}\sum_{y=1}^{t}\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\delta\delta)}(n)+\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\gamma\gamma)}(n) \\
& \qquad -\sum_{x=1}^{t}\sum_{y=1}^{n}\Big(\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\delta\gamma)}(n)+\tilde{\Phi}_{2yx}^{(\gamma\delta)}(n)\Big)\Big\}\delta_{s,n+1}(1-\delta_{t,n+1}) \\
& +6i(\Delta t)^2\sum_{\alpha=1}^{2}F(\alpha,\gamma,s,n+1)\tilde{h}^{(\alpha)}\Big\{\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\alpha\alpha)}(n)+\sum_{x=1}^{s}\sum_{y=1}^{s}\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\gamma\gamma)}(n) \\
& \qquad -\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{s}\Big(\tilde{\Phi}_{2xy}^{(\alpha\gamma)}(n)+\tilde{\Phi}_{2yx}^{(\gamma\alpha)}(n)\Big)\Big\}(1-\delta_{s,n+1})(1-\delta_{t,n+1})\,\delta_{s,t}\,\delta_{\gamma,\delta} \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

(但し， $F(\alpha,\beta,j,k)\stackrel{d}{\equiv}\Big\{\frac{1}{r_o}f''(r_o^{(\alpha)}-r_o^{(\beta)},t_j-t_k)-\frac{1}{r_o^{2}}f'(r_o^{(\alpha)}-r_o^{(\beta)},t_j-t_k)\Big\}(1-\delta_{\alpha,\beta})$

$r_o\stackrel{d}{\equiv}r_o^{(\alpha)}-r_o^{(\beta)}$， $\hat{h}^{(\alpha)}\cdot\hat{h}^{(\beta)}$ は $h^{(\alpha)}, h^{(\beta)}$ の $r_o^{(2)}-r_o^{(1)}$ に対する垂直成分の積を表す)

となる．但し，$r_o^{(2)}-r_o^{(1)}$に対する平行成分と垂直成分とに分けた表示としている．

この漸化式を解きB(N)を求めれば良いが，具体的にモデルスペクトルとして

$$S(h,t)=C\frac{1}{1+h^{11/3}}e^{-\frac{h^{4/3}t^2}{c_o}-\frac{h^2}{50}}$$

（但し，Cは f(0,0)=20 とする定数）

を用いることにする．そして，c_oとして

Ⅰ・・・$c_o=2$
Ⅱ・・・$c_o=50$
Ⅲ・・・$c_o\to\infty$

を用いた場合の

$$\langle\langle r^2\rangle\rangle=R^2-(\Delta r_o)^2$$

$$\left(但し, R^2\stackrel{d}{\equiv}\langle\langle[(r^{(2)}-r_o^{(2)})-(r^{(1)}-r_o^{(1)})]^2\rangle\rangle,\ (\Delta r_o)^2\stackrel{d}{\equiv}(r_o^{(2)}-r_o^{(1)})^2=0.01\right)$$

の時間依存性の図が各々図３，図４，図５である．

これらの図や漸化式から考えると，速度相関の時間的な減衰の度合が弱くなれば，$\langle\langle r^2\rangle\rangle$の時間的な増大率は大きくなり$\propto t^3$に近づいていくことが判る．また，この系と基本的に同じ系を他の方法で扱ったＳａｋｕｒａｉ，Ｄｏｉ　ａｎｄ　Ｉｍａｍｕｒａの論文[5]にも，速度相関が時間的に変化しない場合に$\langle\langle r^2\rangle\rangle\propto t^3$となることが予想されている．これらのことから，少なくともこの系に於いては速度相関の時間依存性は$\langle\langle r^2\rangle\rangle$の時間依存性に対して重要な要素だと考えられる．

§４．まとめ

一次元調和振動子はこの方法論の成功例であるが，相対拡散はＲｉｃｈａｒｄｓｏｎの法則（$\langle\langle r^2\rangle\rangle\propto t^3$）[6]が出てはいるが，エネルギースペクトルの時間依存性によって違う結果が出るので成功したとはいえないかも知れない．ただ，「結合ガウス分布の仮定を用いて，Ｒｉｃｈａｒｄｓｏｎの法則が出るか」という議論も残されているし，垂直成分からの寄与を考慮にいれていないこともあるので，基本的にこの方法論がこの系に適用できないともいえない．どちらにせよ，

少なくともこの方法論の運用手順の一例にはなっている．

ここで取り上げた２つの例を見ても分かるように，漸化式に至るまでの道のりは個々の対象によって差がある．特に漸化式を出すまでに必要な近似の差と漸化式の核を導入したパラメターで展開する際にeの肩に乗せるかどうかという問題（これは扱い易さによる）の２つは結果に大きな影響を与えるものである．よって，ここで述べた方法論は全ての対象に対し有効であるとはいえないかも知れない．しかし，調和振動子の例が示すように適用可能な対象が他にもあると考えられる．また，汎関数積分の近似である多重積分を直接行う困難に比較すれば１つの可能性を含んだ近似法といえる．

文　献：

1)　V.N.Popov： Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics(D.Reidel Publishing Company,Dordrecht,Boston, lancaster,1983).

2)　今村　勤：日本物理学会誌　３１（１９７６）３６７．

3)　崎田　文二　吉川　圭二：径路積分による多自由度の量子力学（岩波書店，１９８６）．

4)　今村　勤：確率場の数学（岩波書店，１９７６）．

5)　Y.Sakurai,M.Doi and T.Imamura： J. Phys. Soc. 53 (1984) 1995.

6)　ｱｰ･ｴｽ･ﾓｰﾆﾝ　ｱｰ･ｴﾑ･ﾔｸﾞﾛﾑ：統計流体力学　第４巻（文一総合出版，１９７９）．

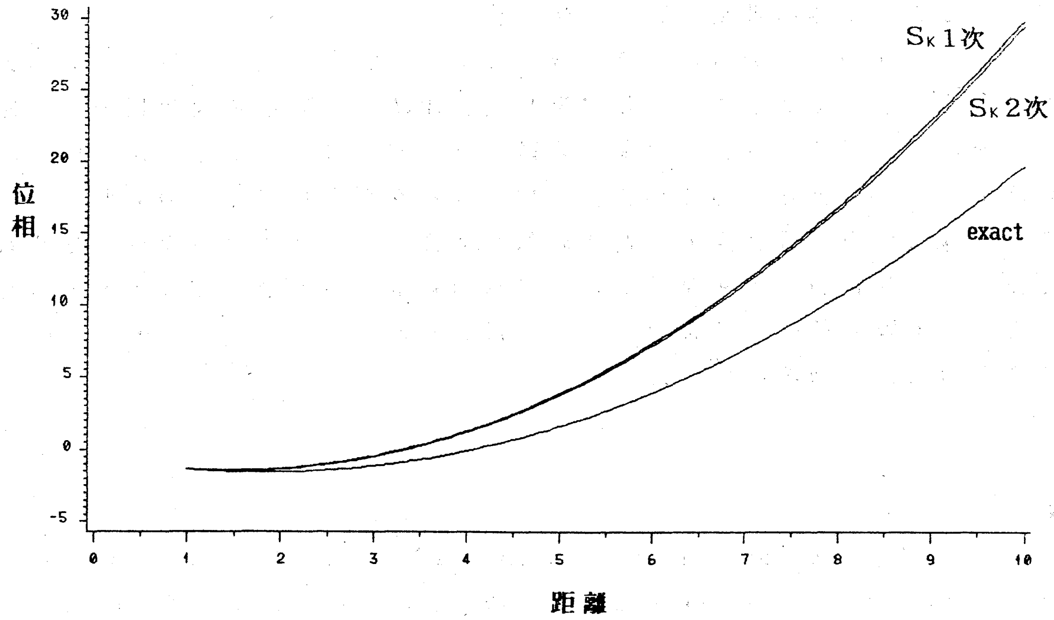

図１　N=10 の場合のSₖ１次まで，Sₖ２次まで，厳密解各々の距離と位相の関係

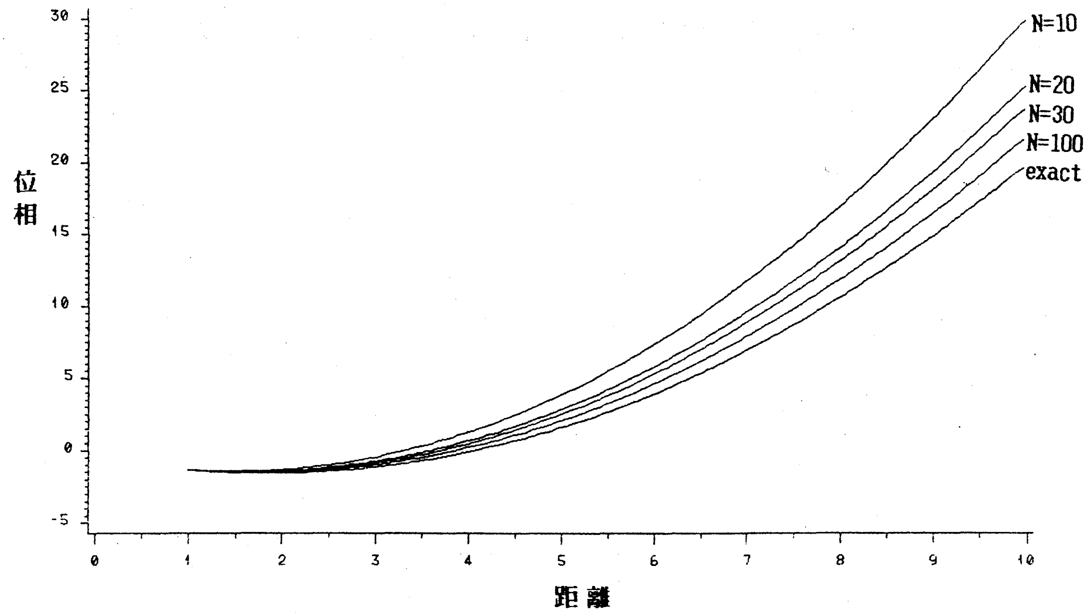

図２　Sₖ１次までの場合の N=10, N=20, N=30, N=100 と厳密解各々の距離と位相の関係

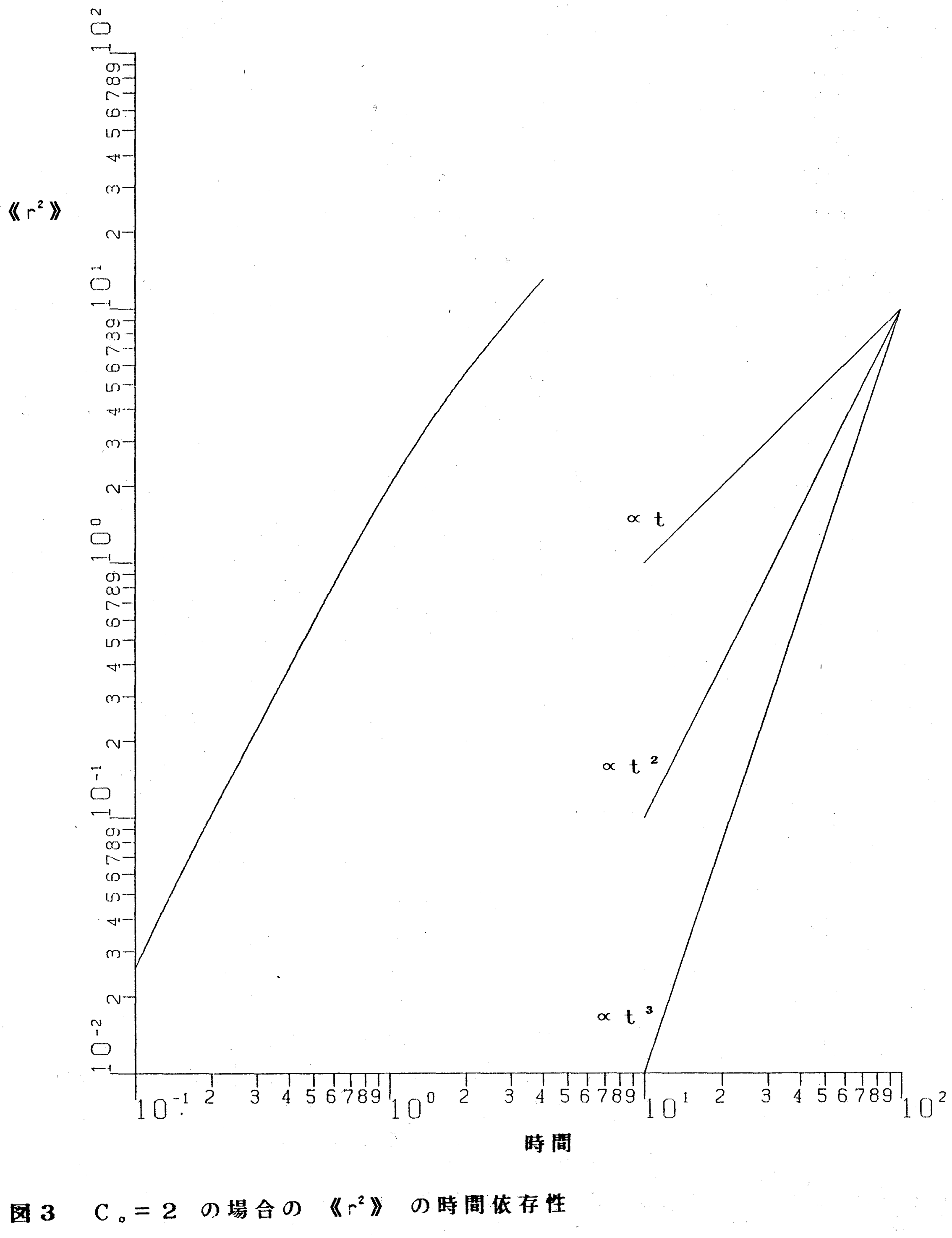

図3　C$_o$＝2　の場合の　《r²》　の時間依存性

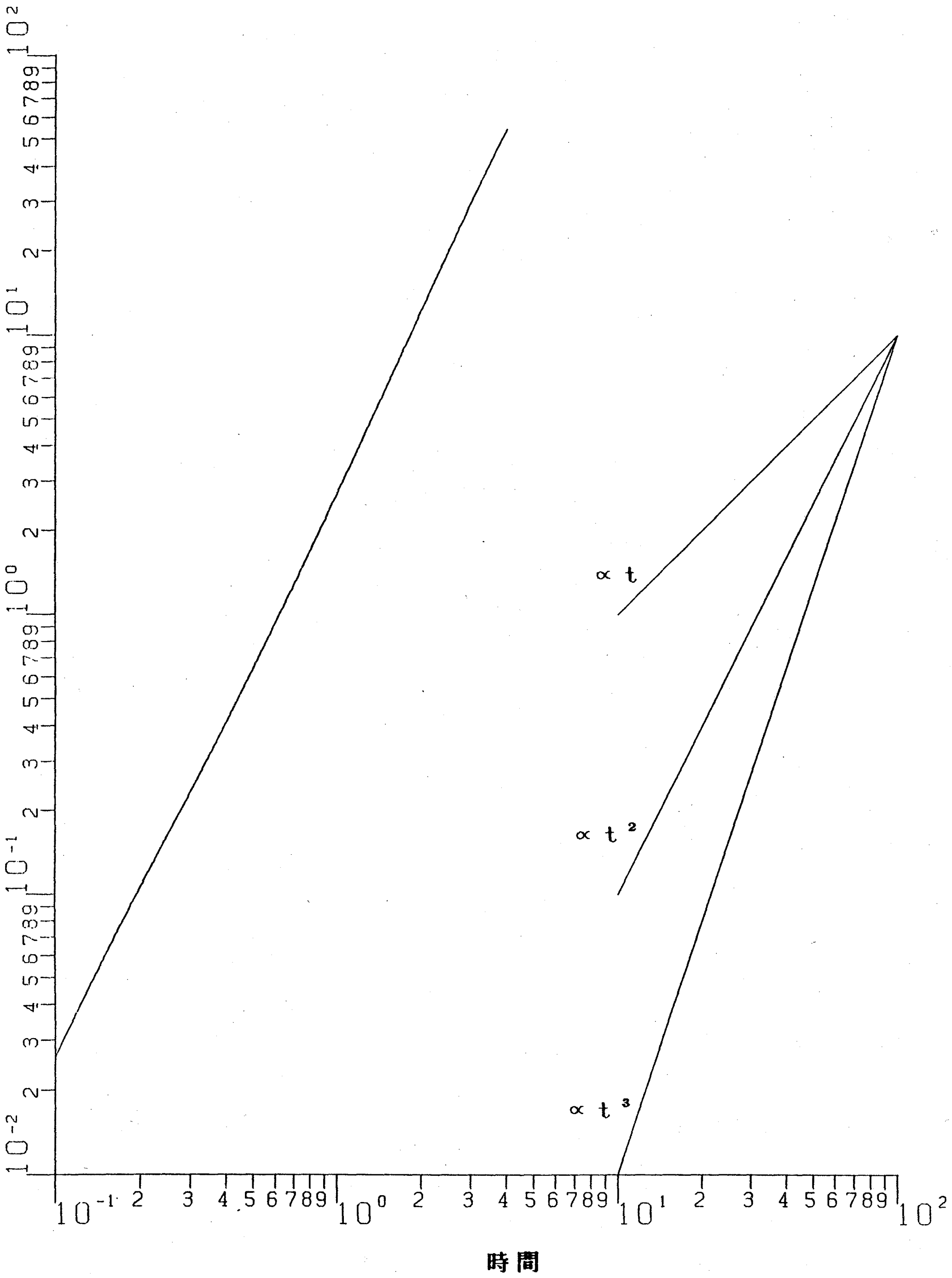

図4　C。＝５０　の場合の　《r²》　の時間依存性

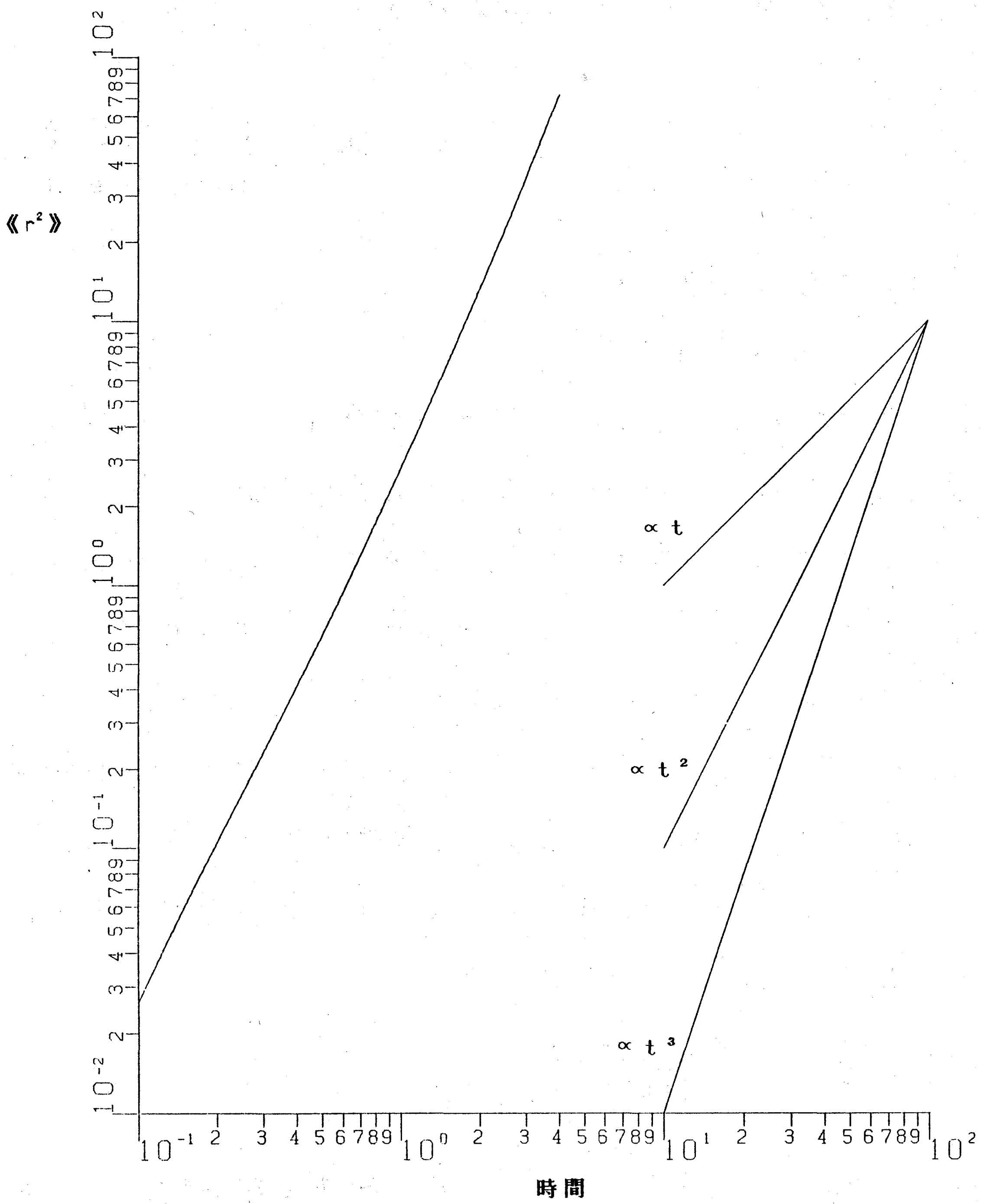

図5　$C_0 \to \infty$ の場合の 《r^2》 の時間依存性